19　2 直線の位置関係

直線の方程式から方向ベクトルと法線ベクトルを求めることができる。
2 直線の位置関係を理解している。

直線の方向ベクトル・法線ベクトル　直線 $\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$ の方向ベクトル（の 1 つ）として $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ がとれ, 法線ベクトル（の 1 つ）として $\boldsymbol{n} = (-v_2, v_1)$ がとれる。
直線 $ax + by + c = 0$ の法線ベクトル（の 1 つ）として $\boldsymbol{n} = (a, b)$ がとれ, 方向ベクトル（の 1 つ）として $\boldsymbol{v} = (-b, a)$ がとれる。
(注意) 方向ベクトルは直線と平行であればどのように選んでもよい。また, 法線ベクトルも直線と垂直であればどのように選んでもよい。
2 直線の位置関係　2 直線 ℓ_1, ℓ_2 の方向ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, 法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ とするとき

$$\ell_1 \mathbin{/\!/} \ell_2 \iff \boldsymbol{v}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{v}_2 \iff \boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2, \qquad \ell_1 \perp \ell_2 \iff \boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2 \iff \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$$

例題 19.1　次の直線の方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ および法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ。
(1)　$2x + 4y + 3 = 0$　　(2)　$\begin{cases} x = -2 + \sqrt{3}\,t \\ y = 1 + t \end{cases}$

＜解答＞　(1) $\boldsymbol{v} = (-4, 2)$, $\boldsymbol{n} = (2, 4)$　　(2) $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{3}, 1\right)$, $\boldsymbol{n} = \left(-1, \sqrt{3}\right)$
(注意) (1) では, $\boldsymbol{v}$ と平行な $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 1)$ や $\boldsymbol{v}_2 = (4, -2)$ なども方向ベクトルであり, $\boldsymbol{n}$ と平行な $\boldsymbol{n}_1 = (1, 2)$ や $\boldsymbol{n}_2 = (-2, -4)$ なども法線ベクトルである。(2) でも同様。

例題 19.2　(1) 点 A$(3, 4)$ を通り, 直線 $\ell : 2x - y + 5 = 0$ に垂直な直線の媒介変数表示を求めよ。
(2) 点 B$(-1, 2)$ を通り, 直線 $m : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$ に平行な直線の方程式を求めよ。

＜解答＞　(1) 直線 ℓ の法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = (2, -1)$ である。ℓ に垂直な直線は $\boldsymbol{n}$ が方向ベクトルと考えられるので, 求める直線の媒介変数表示は $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - t \end{cases}$ となる。
(2) 直線 m の方向ベクトルは $\boldsymbol{v} = (2, -3)$ なので, 求める直線の方程式は $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ より, t を消去して, $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$ を得る。

例題 19.3　2 直線 $\ell_1 : ax + 10y + 3 = 0$, $\ell_2 : 2x + (a + 1)y - 1 = 0$ が次の位置関係となるように定数 a の値を定めよ。
(1)　平行　　(2)　垂直

＜解答＞　ℓ_1, ℓ_2 の法線ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{n}_1 = (a, 10)$, $\boldsymbol{n}_2 = (2, a + 1)$ である。
(1) $\ell_1 \mathbin{/\!/} \ell_2 \iff \boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2$ なので, $\boldsymbol{n}_2 = k\boldsymbol{n}_1$ となる実数 k が存在する。これを成分で表すと $(2, a + 1) = k(a, 10) = (ak, 10k)$ となるので, $2 = ak$,　$a + 1 = 10k$ である。
これを解いて $k = -\dfrac{2}{5}$, $a = -5$, または $k = \dfrac{1}{2}$, $a = 4$ を得る。したがって, $a = -5, 4$
(2) $\ell_1 \perp \ell_2 \iff \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$ なので, $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$ である。したがって, $2a + 10(a + 1) = 0$ となるから, $a = -\dfrac{5}{6}$ を得る。

正誤表

本書中に訂正箇所等がありました．申し訳ございませんでした．お手数をおかけしますが，下記ご参照いただけますようお願い申しあげます．（2020 年 5 月 20 日）

■第 1 版第 3 刷（2012 年 3 月 15 日発行）～第 1 版第 6 刷（2019 年 3 月 1 日発行）の修正箇所

ページ	場所	修正前	修正後	補足
16	問題8.2	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=6$，$\lvert\boldsymbol{b}\rvert=2$，$\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rvert=\sqrt{5}$ のとき，次の値を求めよ。 (1)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　(2)　$\lvert\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\rvert$	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\frac{1}{2}$，$\lvert\boldsymbol{b}\rvert=1$，$\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rvert=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，次の値を求めよ。 (1)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　(2)　$\lvert\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\rvert$	
174	問題8.2 解答	(1) $-\frac{35}{2}$　(2) $\sqrt{122}$	(1) $-\frac{3}{8}$　(2) $\frac{\sqrt{23}}{2}$	

ドリルと演習シリーズ 線形代数 正誤表

コード 30203　第 1 版第 1・2 刷（作成 2011/8/19）

ページ	場所	誤	正
175	左段最下行	$x^2+5x+y^2-2x=0$	$x^2+5x+y^2-2y=0$
	右段 8 行	$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$	$-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$